Priprema za pismeni zadatak

1. Naći izvod sljedećih funkcija:
   a) $y = \ x^2 + x$
   b) $y = \sqrt[3]{x}$
   c) $y = sinx + lnx$
   d) $y = 2^x - e^x$
   e) $y = (3x - 4)x^3$

R: a) $(x^2 + x)' = (x^2)' + x' = 2x + 1$

b) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

c) $(sinx + lnx)' = (sinx)' + (lnx)' = cosx + \frac{1}{x}$

d) $(2^x - e^x)' = (2^x)' - (e^x)' = 2^x ln2 - e^x$

e) $((3x - 4)x^3)' = (3x - 4)'x^3 + (3x - 4)(x^3)' = 3x^3 + 3x^2(3x - 4)$

2. Naći izvod složene funkcije:
   a) $y = \ln(2x + 7)$
   b) $y = (5x^3 + x)^4$
   c) $y = \ 7\sin(x - 2)$
   d) $y = \ \frac{\cos x^3}{x+1}$

R: a) $(\ln(2\mathrm{x} + 7))' = \ (lnu)' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{2x+7}(2x + 7)' = \frac{2}{2x+7}$ $\boxed{u = 2x + 7}$

b) $((5x^3 + x)^4)' = (u^4)' = 4u^3u' = 4(5x^3 + x)^3(5x^3 + x)' =$
$4(5x^3 + x)^3(5 \cdot 3x^2 + 1) = 4(5x^3 + x)^3(15x^2 + 1)$

c) $(7\sin(x - 2))' = 7(sinu)'u' = 7cosu \cdot u' = 7\cos(x - 2)\,(x - 2)' =$
$= 7\cos(x - 2)$

d) $\left(\frac{cosx^3}{x+1}\right)' = \frac{(cosx^3)'(x+1)-cosx^3(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(-sinx^3)\cdot 3x^2(x+1)-cosx^3}{(x+1)^2}$

3. Ispitati monotonost i ekstremne vrijednosti funkcije
   a) $y = 3x^2 - x$
   b) $y = \sqrt{4x+5}$
   c) $\ln(x^2 - 4)$

a) $y = 3x^2 - x$
R: $D_f = R$

$$y' = (3x^2 - x)' = 6x - 1$$
$$?\, y' = 0$$
$$6x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{6} \text{ kandidat za tačku ekstremuma}$$

Monotonost:

$$?\, y' > 0$$
$$6x - 1 > 0$$
$$x > \frac{1}{6}$$

$$y \uparrow za\ x \in (\frac{1}{6}, +\infty)$$

$$y \downarrow za\ x \in (-\infty, \frac{1}{6})$$

Ostaje da provjerimo da li je kandidat $x = \frac{1}{6}$ tačka minimuma ili maksimuma.

$6x - 1$	----------	+++++++
y	$\searrow$	$\nearrow$

$\frac{1}{6}$

$x = \frac{1}{6}$ je tačka minimuma.

b) $y = \sqrt{4x+5}$

Obratimo pažnju na domen. Kako imamo kvadratni korijen, to je uslov za oblast definisanosti:

$$4x+5 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{5}{4} \rightarrow x \in \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

Sada tražimo y'.

$$y' = (\sqrt{4x+5})' = \frac{1}{2\sqrt{4x+5}}(4x+5)' = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$$

Sljedeći korak je da tražimo kandidate za tačke ekstremuma, tj. pitamo se kada je $y' = 0$. Kako je $y' = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$, to on nikada ne može biti 0 (razlomak je 0 kada je brojilac jednak nuli). Odavde zaključujemo da naša funkcija nema tačke minumuma ni maksimuma. Ostaje da vidimo da li funkcija uvijek opada ili uvijek raste.

Monotonost:

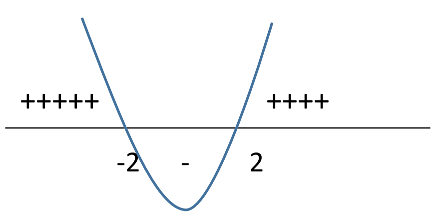
$$y' = \frac{2}{\sqrt{4x+5}} > 0, x \neq -\frac{5}{4}$$

Prvi izvod je uvijek veći od nule, jer je brojilac pozitivan broj, a u imeniocu imamo kvadratni korijen, pa će on dati uvijek pozitivan broj!

Kako je prvi izvod uvijek veći od nule to funkcija raste na $D_f \setminus \left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

d) $y = \ln(x^2-4)$ (teži primjer)

Prije nego krenemo, odredimo domen. Imamo funkciju ln, pa je uslov definisanosti: $x^2 - 4 > 0$



$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Sada tražimo y'.

$$y' = (\ln(x^2-4))' = \frac{1}{x^2-4}(x^2-4)' = \frac{2x}{x^2-4}$$

Kad smo našli prvi izvod, tražimo kandidate za tačke ekstremuma.

$$y' = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Tačka x=0 je kandidat. Međutim, bitno je vratiti se na domen funkcije $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Primjetimo da $x = 0 \notin D_f$, pa nećemo imati tačke ekstremuma. Ostaje da ispitamo monotonost.

Monotonost: ? $y' > 0 \rightarrow \frac{2x}{x^2-4} > 0$

-2 0 2

$2x$	-------	--------	+++++++	++++
x^2-4	++++++	--------	-----------	++++
y'	-------	++++++	-----------	+++++
y	$\searrow$			$\nearrow$

Ne pripada domenu

$y \downarrow za\ x \in (-\infty, -2)$
$y \uparrow za\ x \in (2, +\infty)$

4. Ispitati aspimptote funkcija:
   a) $y = \ln(x+6)$
   b) $y = \frac{3x}{x^2-4}$
   c) $y = \frac{1}{x-3}$

R: a) $y = \ln(x+6) \rightarrow x+6 > 0 \rightarrow x > -6 \rightarrow \quad x \in (-6, +\infty)$

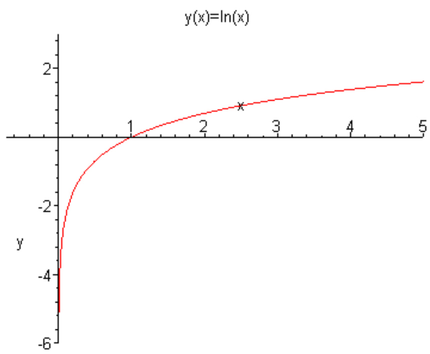
❖ Vertikalna asimptota:

Kandidat: x=-6

$$\lim_{x \to -6+\epsilon} \ln(x+6) = \lim_{\epsilon \to 0} \ln(-6+\epsilon+6) = \ln \lim_{\varepsilon \to 0} +\varepsilon = \ln(+0) = -\infty$$

Zaključujemo da je x=-6 vertikalna asimptota sa desne strane.

- ✓ Kako je ln neprekidna funkcija to je moguće da limes i ln zamijene mjesta. Dodatno, ne ispitujemo $\lim_{x \to -6-\varepsilon} \ln(x+6)$ jer je domen $D_f = (-6, +\infty)$, što znači da $-6-\varepsilon \notin D_f$.



Grafik funkcije lnx. Vidimo da kako je $\ln(+0) = -\infty$.

- ❖ Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x-6) = ln \lim_{x \to +\infty} (x+6) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Zaključujemo da nemamo horizontalnu asimptotu. Potrebno je ispitati kosu asimptotu.

- ✓ Ne ispitujemo $\lim_{x \to -\infty} \ln(x+6)$ jer je domen funkcije $D_f = (-6, +\infty)$,tj. domen ne teži $-\infty$.

- Kosa asimptota:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+6)}{x} = 0$$

Ovaj limes se rješava metodom koju još uvijek nismo učili (Lopitalovo pravilo), tako da ćemo se u ovom primjeru zaustaviti ovdje. Međutim, kako je k=0, možemo zaključiti da nemamo kosu asimptotu.

b) $y = \frac{3x}{x^2-4}$

Domen: $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 2 \rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2{,}2) \cup (2, +\infty)$

- Vertikalna asimptota

  Kandidati: $x = -2 \; i \; x = 2$. U ovom slučaju za oba kandidata ispitujemo limes i sa lijeve i sa desne strane, jer nam je takav domen.

$$\lim_{x \to -2-\varepsilon} \frac{3x}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3(-2-\varepsilon)}{(-2-\varepsilon)^2 - 4} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-6-6\varepsilon}{4\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{-6}{+0} = -\infty$$

  Zaključujemo da je x=-2 vertikalna asimptota sa lijeve strane.

  Na sličan način se rade preostali primjeri za vertikalnu asimptotu.

❖ Horizontalna asimptota

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

$y=0$ je horizontalna asimptota.

c) $y=\frac{1}{x-3}$

$x-3\neq 0\rightarrow x\neq 3\ \rightarrow\ D_f: x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

❖ Vertikalna aspimtota

Kandidat: $x=3$

$$\lim_{x\to 3-\varepsilon}\frac{1}{x-3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3-\varepsilon-3}=\frac{1}{-0}=-\infty$$

$x=3$ je asimptota sa lijeve strane.

$$\lim_{x\to 3+\varepsilon}\frac{1}{x-3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3+\varepsilon-3}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$x=3$ je vertikalna asimptota sa desne strane.

❖ Horizontalna asimptota

Posmatramo domen, $D_f: x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$. U domenu se nalaze i $\pm\infty$, pa ispitujemo oba limesa.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-3}=0$$

$y=0$ je horizontalna asimptota.