Header (staviti Vaše ime i prezime i sliku ) 

**VJEŽBA**

Footer ( napisati danasnji datum i ime Vaše škole)

Glava 1

Vektorski prostori

1.1 Definicija vektorskog prostora. Primjeri. Osnovna svojstva

U ovom poglavlju ćemo uvesti osnovni pojam Linearne algebre - vektorski prostor.

Definicija 1.1. Skup V naziva se vektorskim prostorom nad poljem P ako su na njemu definisane dvije operacije:

(I) operacija ” + ” sabiranja elemenata iz skupa V , t.j. ∀x, y ∈ V, x + y ∈ V ,

(II) operacija ”·” množenja elemenata iz skupa V elementima iz polja P, t.j. ∀x ∈ V i ∀α ∈ P

α · x ∈ V ,

pri čemu su zadovoljene sljedeće aksiome:

1. ∀x, y, z ∈ V važi x + (y + z) = (x + y) + z;

2. ∀x, y ∈ V važi x + y = y + x;

3. ∃0 ∈ V takav da ∀x ∈ V važi x + ∅ = x;

4. ∀x ∈ V ∃(−x) ∈ V takav da važi x + (−x) = ∅;

5. ∀x, y ∈ V ∀α ∈ P važi α · (x + y) = α · x + α · y;

6. ∀x ∈ V ∀α, β ∈ P važi (α + β) · x = α · x + β · x;

7. ∀x ∈ V ∀α, β ∈ P važi α · (β · x) = (α · β) · x;

8. ∀x ∈ V 1 · x = x, gdje je 1 neutralni element za množenje u polju P.

Elemente vektorskog prostora V nazivamo vektorima.

Elemente polja P nazivamo skalarima.

Element vektorskog prostora ∅ nazivamo nula vektorom, za njega koristimo drugačiju oznaku

od skalara (broja) 0, kako bismo bili precizniji, a formule jasnije.

Primjedbe.

1. Naglasimo da prethodna definicija podrazumijeva postojanje dvije operacije: sabiranje dva

vektora i množenje vektora skalarom (brojem). Nikakve druge operacije (za sada) ne poznajemo, na primjer, nismo definisali operaciju množenja dva elementa vektorskog prostora V .

2. Moguće je razmatrati vektorske prostore nad bilo kojim poljem P. Ipak, u Linearnoj algebri

se obično razmatraju vektorski prostori nad poljima realnih brojeva R i kompleksnih brojeva

C. Mi ćemo se tokom čitavog kursa ograničiti samo na ta dva polja. Štaviše, u početku ćemo

8 Vektorski prostori

razmatrati samo vektorske prostore nad poljem realnih brojeva, i tek kasnije preći i na prostore

nad poljem C. Dakle, u početku možemo smatrati da su skalari realni brojevi.

Primjer 1. Razmotrimo skup V

2− geometrijsku ravan čiji elementi su orjentisane duži. Uvedimo operaciju sabiranja dva geometrijska vektora (orjentisanih duži) na način koji nam je poznat

(Slika 1.1): pravilom paralelograma (nadodavanjem jedne duži na drugu). Dalje, uvedimo operaciju množenja geometrijskih vektora realnim brojevima na poznat način: množenje brojem

ne mijenja pravac vektora, ali mijenja dužinu i, u slučaju negativnog broja, smjer. Provjeravajući aksiome, utvrdjujemo da nakon uvodjenja ove dvije operacije skup V

2 postaje vektorski

prostor nad poljem realnih brojeva.

1.2 Vektorski potprostori

Kao i ranije, sa V označavamo vektroski prostor nad poljem P.

Definicija 1.2. Podskup W ⊆ V naziva se potprostorom prostora V , ako je W vektorski

prostor.

Teorema 1.1. Podskup W ⊆ V je potprostor ako i samo ako

1. ∀x, y ∈ W x + y ∈ W;

2. ∀x ∈ W, ∀α ∈ P α · x ∈ W.

Ova teorema se lako dokazuje direktnom provjerom svih aksioma vektorskog prostora.

Razmotrimo neke primjere vektorskih potprostora. Najprije primijetimo da svaki prostor V ima

dva trivijalna potprostora, to su čitav prostor V i prostor koji se sastoji samo od nula vektora

{0}. Vratimo se primjerima vektorskih prostora iz prethodne sekcije kako bismo proučili njihove

potprostore.

Primjer 1. Razmotrimo neke podskupove vektorskog prosotra V

2 geometrijskih vektora:

1. Prvi kvadrant K nije vektorski potprostor, jer, na primjer, množenje vektora negativnim

brojem daje vektor izvan skupa K (Slika 1.2).

2. x i y-ose su vektorski potprostori. Dalje, vidimo da su sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak takođe potprostori. To su, uz dva trivijalna potprostora 0 i V

2

, jedini vektorski

potprostori u V

2.

Glava 4

Linearni operatori u konačnodimenionalnim vektorskim prostorima

U ovoj glavi ćemo se upoznati sa preslikavanjima jednih vektorskih prostora u druge. Za

preslikavanje ćemo korisiti riječ operator. Linearna algebra se bavi linearnim operatorima.

4.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem P.

Definicija 4.1. Preslikavanje A iz vektorskog prostora V u vektorski prostor W se naziva

linearnim operatorom, ako ∀x, y ∈ V i ∀α ∈ P važi:

1) A (x + y) = A x + A y;

2) A (αx) = αA x.

Oznaka: Skup linearnih operatora iz prostora V u prostor W označavamo sa L(V → W).

Dakle, zapis A ∈ L(V → W) označava da je A linearan operator iz prostora V u prostor W.

Oznaka: Linearne operatore ćemo uvijek označavati velikim latinskim pisanim slovima, to jest

A , B, i tako dalje.

Svojstva linearnih operatora

1) Linearni operator preslikava nula vektor u nula vektor: A 0V = A 0W .

Dokaz

A 0V = A (x − x) = A x + A (−x) = A x + (−1) A x = A x − A x = 0W .

2) Operator A iz V u W je linearan, ako i samo ako za svako x, y ∈ V i svako α ∈ P važi

A (αx + y) = αA x + A y.

Primjeri linearnih operatora.

1. Razmotrimo linearni operator A iz prostora R

n u R

n

zadat sa A x = 2x za svako x ∈ R

n

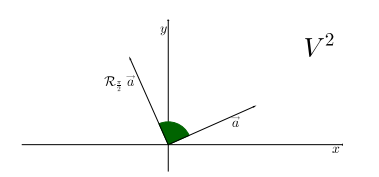
.

Za svako x, y ∈ R

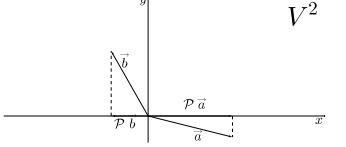
n važi:

A (x + y) = 2 (x + y) = 2x + 2y = A x + A y

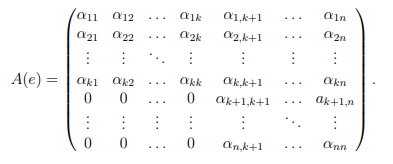
68 Linearni operatori u konačnodimenionalnim ve



*Slika 1. Operator rotacije za prav ugao*



Slika 2. Operator projekcije na x-osu



Slika 3. Matrica dimenzije nxk