Priprema za pismeni (zadaci za vježbu)

1. Date su tačke A(1,1), B(3,2), C(1,8). Naći:
    a. Jednačinu prave koja sadrži tačke A i B.
    b. Jednačinu prave koja je paralelna sa p(A, B) i sadrži tačku C.
    c. Odrediti koordinate tačke D koja je središte duži BC.

R: a) A(1,1) i B(3,2). Primjena formule za jednačinu prave kroz dvije tačke,tj.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{2 - 1}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

b) Treba naći jednačinu prave koja je paralelna pravoj $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Ovdje koristimo uslov paralelnosti ($y_1 \parallel y_2 \rightarrow k_1 = k_2$), pa je koeficijent pravca $k = \frac{1}{2}$. Imamo $k = \frac{1}{2}$ i tačku C(1,8) koju ta prava sadrži. Koristimo formulu za jednačinu prave kroz jednu tačku

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

c) Tačka D je središte duži BC, gdje B(3,2) i C(1,8). Pogledati lekciju o podjeli duži u datom razmjeru. Koordinate središta duži su specijalan slučaj formule $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$. Središte duži ima koordinate $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Dakle, $D\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+8}{2}\right) \rightarrow D(2,10)$.

2. Prebaciti iz implicitnog (opšteg) oblika u segmentni sljedeće prave
    a. $2x - 3y + 4 = 0$
    b. $2x + y - 5 = 0$
    c. $x - 3y - 6 = 0$

   Nakon toga nacrtati date prave u koordinatnom sistemu.

   Rađen na času!

3. Da li tačka P pripada pravoj *p*:

   a) $p : 2x - 3y + 4 = 0$, P(–2,0)
   b) $p : x - y + 7 = 0$, P(3,–4)
   c) $p : 2x + y - 5 = 0$, P(2,1)
   d) $p : x - 3y - 6 = 0$, P(4,4)

   R: Kako provjeravamo da li tačka pripada pravoj? Da bi tačka pripadala pravoj, potrebno je da koordinate tačke P zadovoljavaju jednačinu prave p.

   a) P(-2,0) ove koordinate ubacujemo u jednačinu prave p.

   $$2 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 + 4 = 0$$
   $$-4 + 4 = 0$$
   $$0 = 0$$ T (iskaz tačan, pa P∈ p).

   b) $3 - (-4) + 7 = 0$
   $14 = 0$ $\perp$ (netačan iskaz-jednakost nije zadovoljena, pa P∉p).

4. Naći ugao između pravih:

   a) 3x−y+3=0 i 2x+y-5=0 ;
   b) 4x-y-7=0 i x-4y-8=0 ;

   R: U ovom zadatku koristimo formulu $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ gdje su k_1 i k_2 koeficijenti dveju pravih, a φ ugao između njih. Potrebno je da jednačine pravih prebacimo iz implicitnog u eksplicitni oblik kako bismo pročitali koeficijente.

a) $$p_1: 3x - y + 3 = 0$$

$$y = 3x + 3 \ \rightarrow \ k_1 = 3$$

$$p_2: 2x + y - 5 = 0$$

$$y = -2x + 5 \ \rightarrow \ k_2 = -2$$

Našli smo koeficijente, pa sada ubacujemo podatke u formulu.

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-2 - 3}{1 - 6} = \frac{5}{6}$$

$$tg\varphi = \frac{5}{6} / arctg$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{5}{6}\right)$$

b) *p_1:4x-y-7=0 i p_2: x-3y-8=0*

$$p_1: y = 4x - 7 \rightarrow \ k_1 = 4$$

$$p_2: y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \rightarrow k_2 = \frac{1}{3}$$

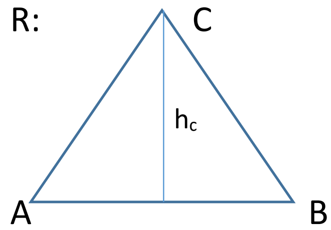
Našli smo koeficijente, pa sada ubacujemo podatke u formulu.

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{1}{3} - 4}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{-\frac{11}{3}}{\frac{7}{3}} = -\frac{11}{3} \leq -1$$

Kako smo dobili $tg\varphi \leq -1$, to znači da ove dvije prave ne leže u istoj ravni, jer znamo da je $-1 \leq tg\varphi \leq 1$!

5. Data su tjemena ΔABC, A(-4,1), B(6,1), C(0,-2). Odrediti jednačinu visine h_c.

R:



Uputstvo: Visina $h_c \perp p(A,B)$. Potrebno je naći jednačinu prave koja sadrži tačke A i B (jednačina prave kroz dvije tačke) kako bismo iskoristili uslov normalnosti ($k_2 = -\frac{1}{k_1}$). Takođe, tačka C pripada pravoj na kojoj leži visina h_c.

6. Date su tačke A(-1,1) i B(4,3). Tačka C dijeli duž AB u odnosu AC:CB=2:1. Naći jednačinu prave koja sadrži tačku C i normalna je na p(A,B).

7. Odrediti jednačinu prave koja sadrži presječnu tačku pravih

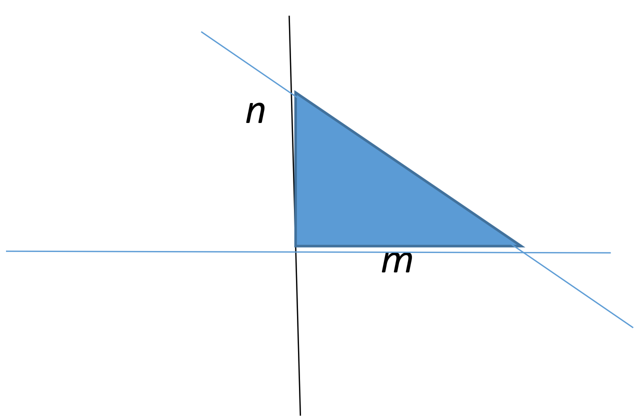
   p_1: $x+7y-12=0$ i p_2: $2x-y+6=0$ i tačku A(8,-4)

   Rađeno na času!

8. Naći projekciju tačke A(2,5) na pravu p: -4x+2y-6=0.
   Rađeno na času!

9. Izračunati površinu trougla koga obrazuje prava 3x+4y-12=0 sa koordinatnim osama.

R:



$$P = \frac{mn}{2}$$

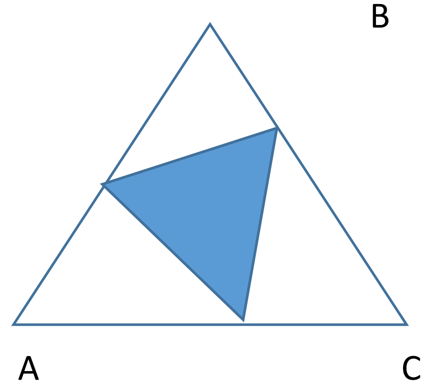
Primjetimo da pravu moramo prebaciti u segmentni oblik kako bismo saznali odsječke na x i y osi, tj.katete pravouglog trougla.

3x+4y-12=0 → $3x + 4y = 12\ /:12$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1\ \rightarrow m = 4\ i\ n = 3 \rightarrow P = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

10. Koordinate tjemena trougla su A(7,10), B(-1,4), C(-8,4). Odrediti središte duži AB, podijeliti stranicu BC u razmjeri 1:2, a stranicu CA u razmjeri 2:3. Povezati dobijene tačke i izračunati površinu dobijenog trougla.

Uputstvo:



11. Odrediti jednačinu simetrale duži AB, ako je:
   a) A(1,-4) i B(3,2);
   b) A(-5,-2) i B(1,4).

12. Izračunati uglove trougla ABC ako su tjemena trougla A(3,7), B(5,1) i C(1,3).