RASTOJANJE IZMEĐU DVIJE TAČKE, PODJELA DUŽI U DATOJ RAZMJERI I POVRŠINA TROUGLA

Neka su date tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, tada je ***rastojanje d(A;B)*** između tih tačaka :

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Neka su date tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ i znamo da tačka $M(x_M ; y_M)$ dijeli datu duž u razmjeri $AM{:}MB = n{:}m = \lambda$, tj. $\lambda = \frac{n}{m}$, tada možemo odrediti ***koordinate tačke M*** na sledeći način:

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.}$$

Ako su tačke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ koordinate trougla ABC, tada je ***površina trougla***:

$$\boxed{P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|}$$

ZADACI: (***rastojanje , podjela duži i površina trougla***)

nivo I
1. Data su tjemena trougla: A(-2,3),B(8,-2),C(3,8). Izračunati dužinu stranica i površinu trougla .
2. Odredi dužine stranica trougla ABC ako je $A(1,1), B(4,1), C(1,5)$.
3. Odredi rastojanje između tačaka A i B , ako je $A(3\sqrt{2}; \sqrt{7})$.
4. Data su tjemena trougla: A(-2,3),B(8,-2),C(3,8). Odrediti koordinate sredina stranica trougla.
5. Odrediti koordinate tačke C ako je poznato da datu duž AB (A(2,4) i B(-2,3)) dijeli u razmeri 3:2.
6. Odredi koordinate težišta trougla ako su data tjemena $A(4,2), B(7,-2), C(1,6)$.
nivo II
1.Odredi na *x* osi tačku koja je podjednako udaljena od tačaka M(7,-4) i N(1,-2).
2. Odredi na *y* osi tačku koja je podjednako udaljena od tačaka A(2,-4) i B(6,-2).
3. Odredi apscisu tačke A(*x*,3) , tako da njeno rastojanje od tačke B(-4, 8) bude 13.
4. Izračunati površinu trougla čija su tjemena A(-3,-3),B(3,5),C(-2,5) i izračunati visinu h_c .
5. Odrediti dužine težišnih linija trougla čija su tjemena a) A(1,1), B(5,3), C(3,-3); b)A(3,4),B(-5,2) i C(-1,-6).
6. Tačke A(2,-1), B(-1, 4), C(-2,2) su sredine stranica trougla. Odrediti koordinate tjemena tog trougla.
7. Data su tjemena trougla A(-3,-2), B(0,-8) i C(5,y). Odredi y tako da trougao bude pravougli sa pravim uglom kod tjemena A.
8. Koordinate tjemena trougla su A(7,10), B(-1,-4), C(-8, 4). Odrediti središte stranice AB, podijeliti stranicu BC u razmjeri 1:2, a stranicu CA u razjmeri 2:3, povezati dione tačke a zatim izračunati površinu dobijenog trougla.

JEDNAČINA PRAVE (RAZLIČITI OBLICI)

PODSJETIMO SE: Linearna funkcija je funkcija oblika $y = k \cdot x + n$. Grafik ove funkcije je PRAVA linija. Dakle, bilo koja tačka koja pripada grafiku(pravoj) ima koordinate (x, y) koje zadovoljavaju jednačinu $y = k \cdot x + n$

Primjer: Posmatraćemo funkcije

$y = 2x + 4$

$x = 0: \quad y = 2 \cdot 0 + 4 = 4$

$y = 0: \quad 0 = 2 \cdot x + 4 \Rightarrow x = -2$

(0,4) i **(-2,0)** pripada grafiku(pravoj)

$y = 2x + 2$

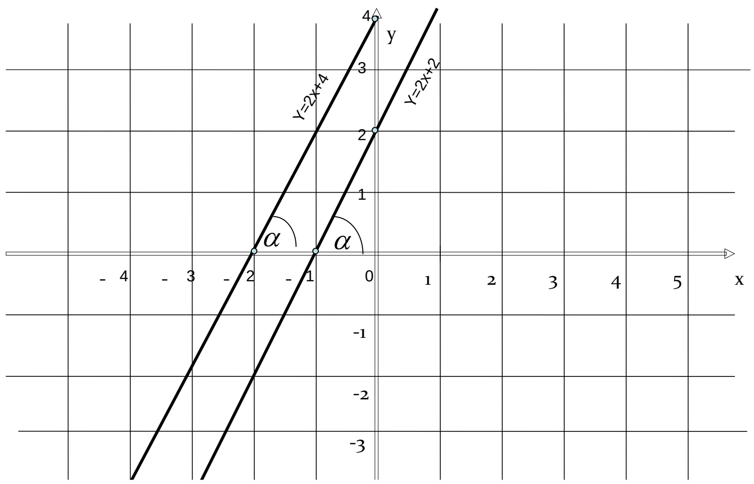
$x = 0: \quad y = 2 \cdot 0 + 2 = 2$

$y = 0:$

$0 = 2 \cdot x + 2 \Rightarrow x = -1$

(0,2) i **(-1,0)** pripada grafiku (pravoj)

kao što vidimo k je uticalo na pravac grafika a n na odsječak na y-osi.



***Dakle, jedan od načina da predstavimo pravu jednačinom je

$\boldsymbol{y = k \cdot x + n}$	**EKSPLICITNI OBLIK**

Pri tom je $\boxed{k}$ **- koeficijent pravca** a $\boxed{n}$**-odsječak na y-osi**
(iz primjera vidimo:
- koeficijenti pravaca kod obe prave su jednaki ($k = 2$), tako da obe prave imaju isti pravac-paralelne su;
 -kod prve je n =4 a kod druge n =2 što odgovara odsječcima na y-osi)

Koeficijent pravca k je jednak *tangensu* ugla koji prava zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose
$\boxed{k = tg\alpha}$

*** Pravu mozemo opisati i sledećom jednačinom

$\boldsymbol{A \cdot x + B \cdot y + C = 0}$	**OPŠTI (implicitni) OBLIK**

Iz ovako zadate jednačine može se zaključiti sledeće:
-ako je <u>A=0</u> onda je prava paralelna x osi;
-ako je <u>B=0</u> onda je prava paralelna y osi;
-ako je <u>C=0</u> onda prava prolazi kroz koordinatni početak.

*** Prava se može još zadati i sledećom jednačinom

$$\boldsymbol{\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1}\qquad \textbf{SEGMENTNI OBLIK}$$

Pri tom je $\boxed{m}$**- odsečak na *x* osi** a $\boxed{n}$**- odsečak na *y* osi.**

Važno je da se sa bilo kog oblika može preći (odgovarajućom transformacijom) na bilo koji drugi oblik.

PRIMJERI:

$\boxed{1.}$ Kako sa jednog oblika prelazimo na drugi?

Neka je prava zadata u <u>eksplicitnom obliku</u>: $y = 2x + 4$

Ako sve veličine „stavimo“ sa iste strane jednakosti dobijamo: $2x - y + 4 = 0$,

što predstavlja <u>opšti oblik</u> A=2, B=-1, C=4.

Odavde proizilazi: $2x - y = -4$,

Podelom leve i desne strane jednakosti sa -4 dobija se

$$\frac{\frac{x}{-4}}{2}+\frac{\frac{y}{-4}}{-1}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$$

Ovo je <u>segmentni oblik</u> , pri čemu je *m*=-2 a *n*=4

$\boxed{2.}$ Kako provjeravamo da li neka tačka pripada zadatoj pravoj?

Neka je prava *p* zadata na sledeći način $y = 3x - 4$.

*Da li tačka A(2,3) pripada ovoj pravoj?

U datoj jednačini umesto *x* stavićemo broj 2, a umesto *y* broj 3:

$3 = 3\cdot 2 - 4$

$3 = 6 - 4$

$3 = 2$

Ovo je netačna jednakost pa zaključujemo $A \notin p$.

*Da li tačka B(3,5) pripada ovoj pravoj?

Slično prethodnom primjeru :

$5 = 3\cdot 3 - 4$

$5 = 9 - 4$

$5 = 5$

Ovo je tačna jednakost pa zaključujemo $B \in p$.

$\boxed{3.}$ Kako formiramo jednačinu prave ako znamo odsječke na koordinatnim osama?

Formiraćemo jednačinu prave ako znamo da prava odsijeca na *x* i *y* osi redom odsječke 4 i 3 . Opredijelićemo se za segmentni oblik jer se u tom obliku jasno ističu odsječci.

Kako je odsječak na *x* osi 4, a na *y* osi 3 $\Rightarrow$ *m*=4 a *n*=3 pa jednačina postaje: $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

Odavde možemo preći na bilo koji od preostala dva oblika.

$\boxed{4.}$ Kako formiramo jednačinu prave ako znamo ugao koji zaklapa sa *x* osom i odsječak na *y* osi?

Neka je ugao koji prava zaklapa sa *x* osom (pozitivnim smjerom *x* ose) 60°, a odsječak na *y* osi 4. Opredijelićemo se za eksplicitni oblik jer se u tom obliku pojavljuje *k* ($k = tg\alpha$) i *n* (odsječak na *y* osi).

$k = tg60^{o} \Rightarrow k = \sqrt{3}$

$n = 4$

Dakle , jednačina postaje $y = \sqrt{3} \cdot x + 4$

Odavde možemo preći na bilo koji od preostala dva oblika.

ZADACI: (***razni oblici jednačine prave***)

nivo I
1. Transformiši jednačinu prave *p* $a) p : 2x - 3y + 4 = 0; b) p : x - y + 7 = 0; c) p : 2x + y - 5 = 0; d) p : x - 3y - 6 = 0$ u segmentni oblik i nacrtaj u koordinatnom sistemu datu pravu.
2. Odrediti jednačinu prave koja na apscisnoj osi odsijeca odsječak 3, a na ordinatnoj -5.
3. Odredi jednačinu prave koja sa *x*-osom gradi ugao α , a na *y* osi odsijeca odsječak *n* : $a)\alpha = 135^{o}, n = 3; b)\alpha = 120^{o}, n = -3; c)\alpha = 45^{o}, n = -8; d)\alpha = 150^{o}, n = 2$
4. Da li tačka P pripada pravoj *p*: $a) p : 2x - 3y + 4 = 0, P(-2,0); b) p : x - y + 7 = 0, P(3,-4); c) p : 2x + y - 5 = 0, P(2,1); d) p : x - 3y - 6 = 0, P(4,4$?
5. Odrediti tačke u kojima prava $6x - 4y - 3 = 0$ siječe koordinatne ose.
nivo II
1. Dokazati da središte duši AB gdje su A(3,4) i B(5,1), pripada pravoj $x - 2y + 1 = 0$,
2. Prave $x + 5y - 7 = 0; 3x - 2y - 4 = 0; 7x + y + 19 = 0;$ obrazuju trougao. Odrediti tjemena i površinu trougla.
3. U jednačini $2x - (5p - 2)y - 3 = 0$ odredi parametar *p*, tako da grafik prave sa *x*-osom gradi ugao od 45^{o}.
4. U jednačini $3y - 5x + 4p - 3 = 0$ odredi parametar *p*, tako da: $a)$ prava sadrži koordinatni početak; $b)$ prava odsijeca na ordinatnoj osi odsječak 5
5. Izračunati površinu trougla koga obrazuje sa koordinatnim osama prava $3x + 4y - 12 = 0$.
6. U jednačini $px + (p + 1)y - 8 = 0$,odredi parametar *p* tako da prava gradi dva puta veći odsječak na apscisnoj nego na ordinatnoj osi.
7. U jednačini $kx + (k + 1)y - p = 0$ odredi parametre *p* i *k* tako da prava sadrži tačku M(2,1) , a sa koordinatnim osama gradi trougao površine 4.
8. U jednačini $3x + py - 12 = 0$ odredi parametar *p* tako da odsječak prave između koordinatnih osa iznosi 5.

MEĐUSOBNI ODNOS (položaj) DVIJE PRAVE

Dve prave: *p*: $y = k_p x + n_p$ i *q*: $y = k_q x + n_q$ mogu da :

1. **Nemaju zajedničkih tačaka**

(PARALELNE SU) : $\boxed{p // q}$ tada važi $\boxed{k_p = k_q}$

2. **Sijeku se** . Tada imaju jednu zajedničku tačku čije su koordinate **(*x*,*y*)** –rešenja sistema

$$\begin{cases} y = k_p x + n_p \\ y = k_q x + n_q \end{cases}$$

a ugao pod kojim se seku ove prave(tačnije tangens tog ugla) izračunava se po sledećoj formuli:

$$tg\varphi = \frac{k_q - k_p}{1 + k_p \cdot k_q}$$

Specijalno : Prave mogu da se sijeku pod pravim uglom

(NORMALNE SU JEDNA NA DRUGU): $\boxed{p \perp q}$ tada važi $\boxed{k_p = -\frac{1}{k_q}}$

PRIMJERI:

I Određivanje jednačine prave za koju znamo jednu tačku koja joj pripada i položaj u odnosu na neku drugu zadatu pravu.

1.Odrediti jednačinu prave *p* koja sadrži datu tačku P(2,3) i paralelna je sa pravom: $x + y - 2 = 0$.

Rešenje: Treba odrediti jednačinu prave *p*: $y = k_p x + n_p$, dakle treba naći k_p i n_p .

Šta znamo?

* $P(2,3) \in p \Rightarrow 3 = k_p \cdot 2 + n_p$ .....(1)

* $p // q$ to znači da su im koeficijenti pravaca jednaki .

Pošto je prava q u opštem obliku mi je prevodimo na eksplicitni i dobijamo $y = -x + 2$. Vidimo da je $k_q = -1$ odakle zaključujemo da je i $\underline{k_p = -1}$. Zamjenom u jednakosti (1) dobijamo $3 = -1 \cdot 2 + n_p$, odavde je $\underline{n_p = 5}$. Dakle jednačina prave *p* je $\boxed{y = -x + 5}$

2. Odrediti jednačinu prave *p* koja sadrži tačku P(1,2) i normalna je sa pravom *q*: $2x + 3y - 1 = 0$

.Rešenje: $k_p = ?, n_p = ?$

* $P(1,2) \in p \Rightarrow 2 = k_p \cdot 1 + n_p$ ....(1)

* $p \perp q$ što znači da je $k_p = -\frac{1}{k_q}$.

Pošto je prava q u implicitnom obliku mi je prevodimo na eksplicitni i dobijamo $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$,

Vidimo da je $k_q = -\frac{2}{3}$, pa je onda $\underline{k_p = \frac{3}{2}}$. Zamjenom u jednakosti (1) dobijamo: $2 = \frac{3}{2} \cdot 1 + n_p$,

odakle je $\underline{n_p = \frac{1}{2}}$. Dakle jednačina prave *p* je $y = \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$

II Određivanje ugla pod kojim se sijeku prave *p* i *q*

1. Odrediti ugao pod kojim se sijeku prave $p : x + 2y - 9 = 0$ i $q : x - 3y + 14 = 0$.

Rešenje: Obije prave prevodimo na eksplicitni oblik , odakle se vidi da je $k_p = -\frac{1}{2}, k_q = \frac{1}{3}$.

Lako se dobija da je $tg\varphi = 1$, odakle je jasno da je $\varphi = 45°$.

*JEDNAČINA PRAVE KROZ JEDNU TAČKU

Neka je data tačka $A(x_1, y_1)$. Jednačina prave određena tačkom A ako je dat njen koeficijent pravca određuje se na sledeći način:

$$\boxed{y - y_1 = k \cdot (x - x_1)}$$

*JEDNAČINA PRAVE KROZ DVIJE TAČKE

Neka su date tačke $A(x_1, y_1)\ i\ B(x_2, y_2)$.
Ovim tačkama određena je jedna ***prava*** na sledeći način:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)}$$

Koeficijent pravca date prave određen je relacijom: $\boxed{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

PRIMJER: Date su tačke $A(-1;-4), B(0;5)$. Napisati jednačinu prave koja je određena ovim tačkama.

Rešenje:

$y - (-4) = \frac{5-(-4)}{0-(-1)} \cdot \left(x - (-1)\right);$

$y + 4 = \frac{5+4}{1} \cdot (x + 1);$

$y + 4 = 9 \cdot (x + 1);$

$y + 4 = 9x + 9;$

$y = 9x + 9 - 4;$

$y = 9x + 5.$

*RASTOJANJE TAČKE OD PRAVE

Neka je data tačka $A(x_1, y_1)$ i prava $p: A\cdot x + B\cdot y + C = 0$.

Tada je ***rastojanje tačke A od prave p*** dato formulom: $d(A,p) = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

PRIMJER: Data je tačka $A(2;1)$ i prava $p: 3x - y + 7 = 0$. Izračunaj rastojanje tačke od prave.

<u>Rešenje:</u> $d(A,p) = \frac{|Ax_A + By_A + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3\cdot 2 - 1 + 7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|12|}{\sqrt{10}} = \frac{12\cdot\sqrt{10}}{10} = \frac{6\cdot\sqrt{10}}{5}$

<u>Zadaci</u> :

nivo I
1. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $A(2,-3)$ i normalna je na pravu $p: 7x - 4y + 3 = 0$.
2. Odrediti jednačinu prave koja sadrži koordinatni početak i normalna je na pravu $p: 3x + 4y - 2 = 0$.
3. Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz tačke $B(-2,6)\ i\ C(2,1)$.
4. Ispitati odnos pravih $p: 7x - 4y + 3 = 0$ i $q: 3x + 4y - 2 = 0$. Ako se sijeku, izračunati tangens ugla, i koordinate presječne tačke.
nivo II
1.Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $A(-1,-1)$, i paralelna je pravoj koja je određena tačkama $B(-2,6)\ i\ C(2,1)$.
2. Odrediti jednačinu normale konstruisane u središtu duži čiji su krajevi tačke $P(-5,-1)\ i\ Q(-3,4)$.
3. Odrediti projekciju tačke $P(-6,4)$ na pravu $p: 4x - 5y + 3 = 0$.
4. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku preseka pravih $a: x - 3y + 2 = 0$ i $b: 5x + 6y - 4 = 0$ i paralelna je pravoj $c: 4x + y + 7 = 0$.
5. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku preseka pravih $a: 3x - y + 4 = 0$ i $b: 4x - 6y + 3 = 0$ i normalna je na pravu $c: 5x + 2y + 6 = 0$.
6. Odrediti jednačinu prave koja sadrži presek y-ose i prave $p: 3x + 2y - 6 = 0$ i paralelna je pravoj $q: x - 2y + 3 = 0$.
7. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku preseka pravih $a: x + 7y - 12 = 0$ i $b: 2x - y + 6 = 0$ i tačku $P(8,-4)$.
8. Napisati jednačine dijagonala četvorougla čija su temena $A(-4,-5), B(7,6), C(3,8)\ i\ D(-2,3)$.
9. Napisati jednačine težišnih duži trougla čija su temena $A(-1,6), B(5,3)\ i\ C(-5,2)$.
10. Izračunati rastojanje presjeka pravih $a: 3x - 2y - 5 = 0$ i $b: x + 2y - 7 = 0$ od prave $p: 3x - 4y + 15 = 0$.
11. U jednačini prave $q: (2p+1)x + (3p-5)y + 4p = 0$, odrediti parametar p tako da prava bude paralelna sa : a) x-osom; b) y-osom.