KONVEKSNOST I PREVOJNE TAČKE

Prof. Emsada Bećirović

Definicija 1: Funkciju f(x) definisanu na intervalu (a, b) nazivamo **konveksnom (konkavnom**) na (a, b) ako se tačka njenog proizvoljnog luka nalazi ispod (iznad) odsječka koji spaja krajeve luka.

Dovoljan uslov konveksnosti (konkavnosti) :

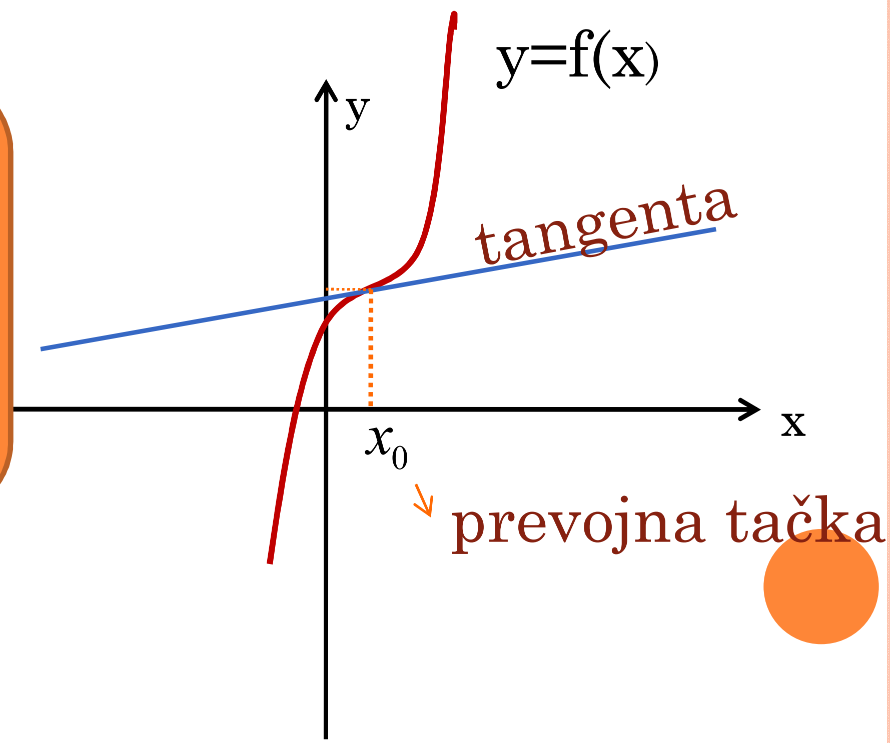
Neka funkcija f(x) ima izvode prvog i drugog reda na intervalu (a, b). Ako je $f''(x)>0\left(f''(x)<0\right)$ za $x \in (a, b)$ tada je f(x) konveksna (konkavna) na intervalu (a,b).

Neophodan uslov postojanja prevojne tačke :

Ako je x_0 **tačka prevoja** grafika funkcije f(x), tada je drugi izvod u toj tački jednak nuli $\left(f''(x_0) = 0\right)$ ili ne postoji.

Tačke u kojima je $\left(f''(x_0) = 0\right)$ nazivamo **kritičnim tačkama** druge vrste.

Tačka koja razdvaja konveksni dio neprekidne krive od konkavnog dijela nazivamo prevojna tačka.



PRIMJER 1. ODREDITI INTERVALE KONVEKSNOSTI (KONKAVNOSTI) GRAFIKA FUNKCIJE $f(x)=x^3-3x^2+5x-1$.

$$f'(x)=3x^2-6x+5$$

$$f''(x)=6x-6$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow 6x=6 \Leftrightarrow x=1$$

$$f''(x)>0 \ za \ x>1$$

$$f''(x)<0 \ za \ x<1$$

$$Data \quad funkcija \quad je \quad konveksna \quad za \ \ 6x-6>0,$$

$$tj.\ na \quad \text{int}\,ervalu\ (1,+\infty),$$

$$a\ konkavna \quad za\ \ 6x-6<0,\ tj.\ na\ \text{int}\,ervalu\ (-\infty,1)$$

Primjer 2. Ispitati konveksnost, konkavnost i odrediti prevojne tačke grafika sledećih funkcija:

$$a)\ f(x)=x^5+5x+5$$

$$b)\ f(x)=(x-2)^4$$

$$c)\ f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

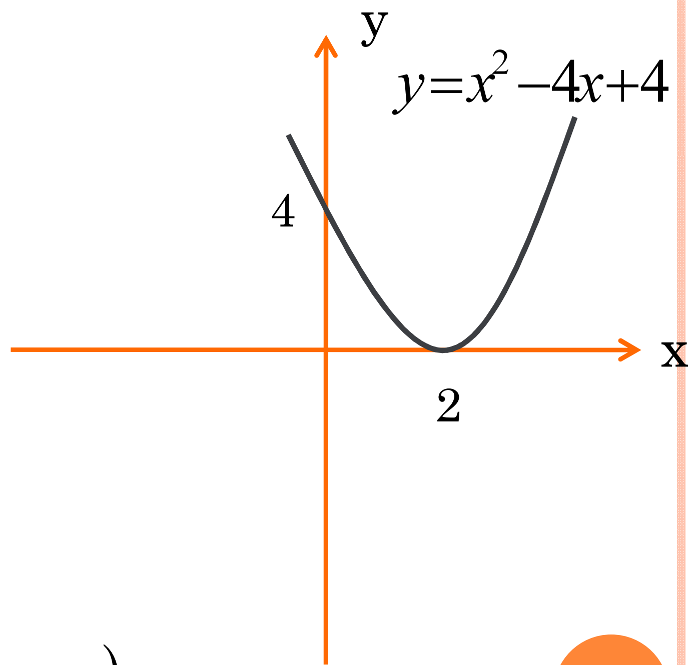
$$b)\ f(x)=(x-2)^4$$

$$f'(x)=4(x-2)^3\cdot(x-2)'=4(x-2)^3$$

$$f''(x)=12(x-2)^2\cdot(x-2)'=12(x-2)^2$$

$$f''(x)=12(x^2-4x+4)$$

$$f''(x)>0$$



Data funkcija je konveksna na intervalu $(-\infty,+\infty)$

$$c)\ f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{x'\cdot(1+x^2)-x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)'=\frac{(1-x^2)'\cdot(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot\left[(1+x^2)^2\right]'}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{-2x\cdot(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{-2x\cdot(1+x^2)^2-2\cdot(1-x^2)\cdot(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{(1+x^2)\left[-2x-2x^3-4x+4x^3\right]}{(1+x^2)^4}=$$

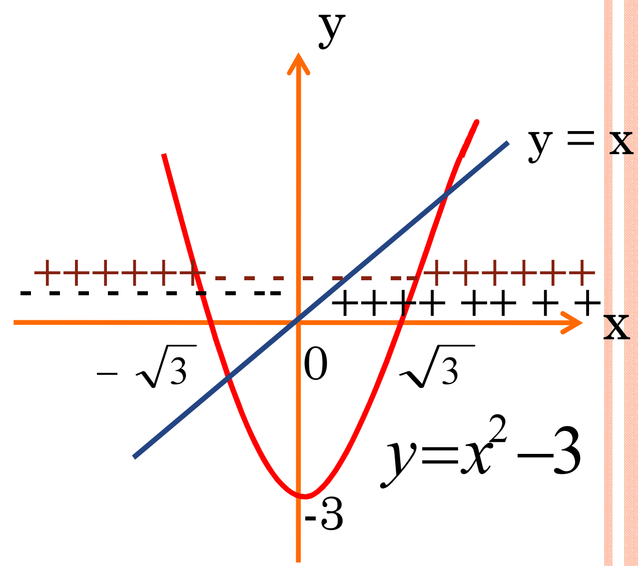
$$=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^4}$$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	$-$	$-$	$+$
$(1+x^2)^4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$				

*   **   ***

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^4}$$



Potreban uslov da grafik funkcije ima prevojnu tačku je:

$$f''(x)=0.$$

U ovom slučaju grafik ima tri prevojne tačke: *, **, ***.

*: $f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{-\sqrt{3}}{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{-\sqrt{3}}{1+3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad P_1\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

**: $f(0)=\dfrac{0}{1+0^2}=0$ $\qquad P_2\left(0,0\right)$

***: $f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{1+3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $\qquad P_3\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Za $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$ funkcija je konkavna, a za $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ funkcija je konveksna.

Zadaci za vježbu:

Ispitati konveksnost, konkavnost i prevojne tačke grafika sledećih funkcija:

$$a)\ y = x^4 + 4x^2$$

$$b)\ y = x^3 - x^2 + 1$$

$$c)\ y = x + \frac{1}{x}$$

$$d)\ y = \frac{2x-1}{(1-x)^2}$$

$$e)\ y = \ln x$$