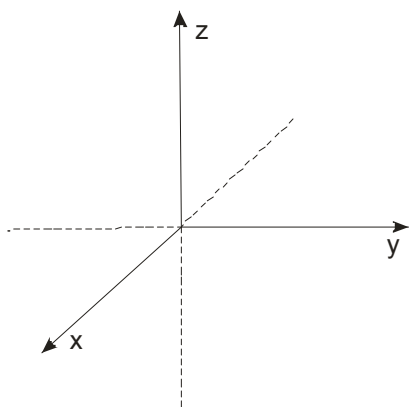


VEKTORI U PROSTORU (I deo)

Pogledajmo najprije kako nastaje Dekartov pravougli trijedrar.

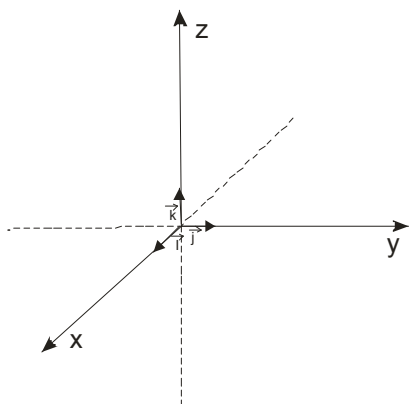
Kroz jednu tačku O postavimo tri numeričke prave (brojne ose) normalne jedna na drugu.



x-osa → Apscisna osa
y-osa → Ordinatna osa
z-osa → Aplikatna osa
Tačka O → koordinatni početak

Po dvije koordinatne ose čine koordinatne ravni (xOy, xOz i yOz) normalne jedna na drugu.

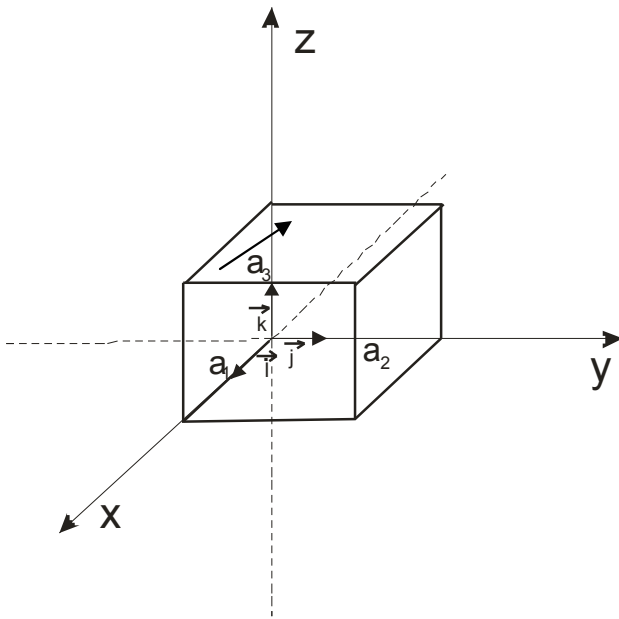
Na x,y i z osi uočimo jedinične vektore (ortove) \vec{i} , \vec{j} i \vec{k}



$$\begin{aligned}\vec{i} &= (1,0,0) \\ \vec{j} &= (0,1,0) \\ \vec{k} &= (0,0,1) \\ |\vec{i}| &= |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1\end{aligned}$$

Svaki vektor \vec{a} u prostoru predstavljamo:

$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad \text{ili}$
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{uredjena trojka}$



Intezitet vektora \vec{a} je

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Jedinični vektor vektora \vec{a} je vektor $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Ako imamo dvije tačke A i B u prostoru, vektor \vec{AB} se pravi:

$$\overrightarrow{A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2)}$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Skalarni proizvod (•)

Neka su dati vektori

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Tada je:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Ako nemamo dat ugao izmedju vektora:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Ugao izmedju dva vektora:

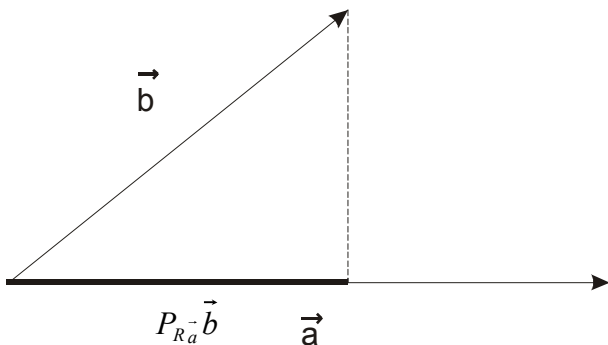
$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Uslov normalnosti:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Projekcija vektora : $P_{R_a} \vec{b}$ je projekcija vektora \vec{b} na pravac vektora \vec{a} i obrnuto :

$P_{R_b} \vec{a}$ je projekcija vektora \vec{a} na \vec{b}



$$P_{R_a} \vec{b} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|} \quad \text{i} \quad P_{R_b} \vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Primjeri

1) Odrediti skalarni proizvod vektora:

$$\vec{a} = (4, -3, 1)$$

$$\vec{b} = (5, -2, -3)$$

Rješenje:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4, -3, 1) \cdot (5, -2, -3)$$

$$= 20 + 6 + (-3) = 23$$

2) Dati su vektori $\vec{a} = (1, -1, 2)$ i $\vec{b} = (0, 2, 1)$. Odrediti ugao između vektora $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$.

Rješenje:

$$\vec{a} = (1, -1, 2)$$

$$\vec{b} = (0, 2, 1)$$

Nadjimo najprije vektore $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, -1, 2) + (0, 2, 1) = (1, 1, 3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, -1, 2) - (0, 2, 1) = (1, -3, 1)$$

Radi lakšeg rada nazovimo: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{x}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{y}$$

Dakle: $\vec{x} = (1, 1, 3)$ i $\vec{y} = (1, -3, 1)$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (1, 1, 3) \cdot (1, -3, 1) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$\left| \vec{x} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\left| \vec{y} \right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Sad ovo ubacimo u formulu:

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\left| \vec{x} \right| \left| \vec{y} \right|} = \frac{1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}}$$

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{11}$$

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos \frac{1}{11}$$

3) Odredi projekcije vektora $\vec{a} = (5,2,5)$ na vektor $\vec{b} = (2,-1,2)$

Rješenje: $\vec{a} = (5,2,5)$

$$\vec{b} = (2,-1,2)$$

$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a}) = ?$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (5,2,5) \cdot (2,-1,2) = 10 - 2 + 10 = 18$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

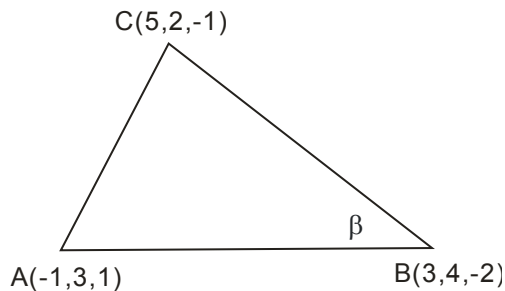
$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a}) = \frac{18}{3}$$

$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a}) = 6$$

4) Date su koordinate temena trougla ABC (A(-1,3,1), B(3,4,-2), C(5,2,-1)). Odrediti

ugao ABC.

Rješenje:



Nadjimo najpre vektore \vec{BA} i \vec{BC}

$$\cos \beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}$$

$$\cos \beta = \frac{-3}{3 \cdot \sqrt{26}}$$

$$\cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\beta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\vec{BA} = (-1,3,1) - (3,4,-2) = (-4,-1,3)$$

$$\vec{BC} = (5,2,-1) - (3,4,-2) = (2,-2,1)$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + 3^2} = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

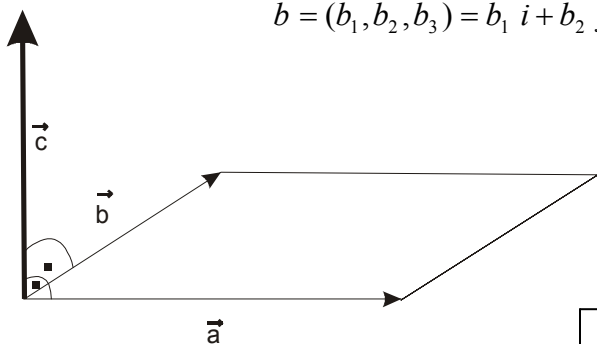
$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-4,-1,3) \cdot (2,-2,1) = -8 + 2 + 3 = -3$$

Vektorski proizvod ($\vec{a} \times \vec{b}$)

Neka su dati vektori

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$



$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Pazi: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$

- 1) Vektor \vec{c} je normalan i na vektor \vec{a} i na vektor \vec{b}
- 2) Intenzitet vektora \vec{c} je brojno jednak površini paralelograma nad vektorima \vec{a} i \vec{b}
- 3) Smer vektora \vec{c} se određuje pravilom desnog triedra (desnog zavrtnja)

Intenzitet vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Vektori \vec{a} i \vec{b} su kolinearni ako i samo ako je njihov vektorski proizvod jednak $\vec{0}$.

Konkretno:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \text{razvijemo ovu determinantu i (na primjer) dobijemo } \# \vec{i} + \$ \vec{j} + \& \vec{k} \text{ gde su}$$

$\#, \$, \&$ neki brojevi.

Tada je $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\#^2 + \$^2 + \&^2}$

Površina paralelograma nad vektorima \vec{a} i \vec{b} je $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Dok površinu trougla računamo (logično) kao polovinu površine paralelograma:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

5. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima:

$$\vec{a}=(1,1,-1) \quad \text{i} \quad \vec{b} (2,-1,2)$$

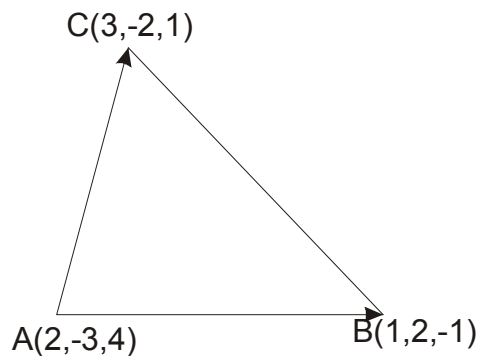
Rešenje: $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$ Najprije tražimo $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(2-1) - \vec{j}(2+2) + \vec{k}(-1-2) = 1\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k} = (1, -4, -3)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} \quad \text{dakle } P = \sqrt{26}$$

6. Izračunati površinu trougla ako su date koordinate njegovih tjemena A(2, -3, 4), B(1,2,-1), C(3,-2,1)

Rješenje: Najprije oformimo vektore \vec{AB} i \vec{AC}



$$\vec{AB} = (1-2, 2-(-3), -1-4) = (-1, 5, -5)$$

$$\vec{AC} = (3-2, -2-(-3), 1-4) = (1, 1, -3)$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$